

文章编号: 1000-8055(2002)05-0505-08

相关系数平稳过程时频分析方法

傅惠民, 刘成瑞, 马小兵

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

摘要: 相关系数平稳过程是从非平稳过程中分离出一类工程上常见且便于研究的随机过程, 其均值和方差都可随时间变化, 传统的平稳随机过程是它的一个特例。本文提出了相关系数 $AR(p)$, $MA(q)$ 和 $ARMA(p, q)$ 序列的概念, 建立了相关系数平稳过程的时频分析方法。该方法首先在时域进行全程分析, 得到相关系数平稳过程的均值函数、方差函数和相关系数函数, 然后可以对其进行傅里叶变换、短时傅里叶变换或小波变换, 给出相关系数平稳过程的谱密度, 同时提出了随机项谱密度和趋势项谱密度的概念。文中还讨论了线性系统对相关系数平稳过程输入的响应。

关键词: 随机过程; 平稳过程; 相关系数平稳过程; 非平稳随机过程; 谱密度; 时频分析; 线性系统

中图分类号: TB 301

文献标识码: A

Time-Frequency Analysis of Correlation Coefficient Stationary Process

FU Huimin, LIU Cheng-rui, MA Xiao-bing

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The correlation coefficient stationary process in which the mean and variance vary with time is familiar in engineering, and the traditional correlation function stationary process is just a special case of that. The method of time-frequency analysis and $AR(p)$, $MA(q)$ and $ARMA(p, q)$ models of the correlation coefficient stationary process are presented in this paper. Its mean function, variance function and correlation coefficient function can be gained by the method in time domain. Thus the spectrum density of the correlation coefficient stationary process can be obtained by Fourier transform, short-time Fourier transform or wavelet transform. The formulas for calculating the response of a linear system are derived when the input is a correlation coefficient stationary signal. In addition, the concepts of trend component spectrum density and random component spectrum density in random processes are also presented herein. The method has been used in the performance tests of aircraft and satellite successfully. It shows that a great number of specimens and time have been saved.

Key words: random process; stationary process; correlation coefficient stationary process; non-stationary random processes; spectrum density; time-frequency analysis; linear system

收稿日期: 2002-09-24; **修订日期:** 2002-10-25

基金项目: 国防科技预研项目(413200204)

作者简介: 傅惠民(1956—), 男, 浙江遂昌人, 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系“长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究

1 引言

工程实际中遇到的随机过程,其均值和方差多数都随时间而变化,因此,无法用传统的平稳随机过程理论解决。非平稳随机信号分析与处理长期以来一直受到了国内外的重视,是当前学术界研究的热点之一,但是至今尚未形成普遍适用的理论方法^[1~4]。文献[5]通过对大量随机过程实测数据的分析研究,发现它们的相关函数虽然随时间平移而变化,但是它们的相关系数函数基本上不随时间平移而改变,由此提出了相关系数平稳随机过程的概念。本文进一步建立了相关系数平稳过程的时频分析方法,该方法首先充分发挥在时域可以进行全程分析、信息量大的优点,确定相关系数平稳过程的均值函数、方差函数和相关系数函数。然后再对其进行傅里叶变换、短时傅里叶变换或小波变换,给出相关系数平稳过程的谱密度、随机项谱密度和趋势项谱密度。在性能测试中,本文的时域分析方法只要测定一个样本函数就能够对产品性能的均值和方差进行估计,在精度相同的情况下与传统的成组试验法相比,可以节省大量试验经费和时间。

2 相关系数平稳过程与传统平稳过程的关系

文献[5]发现并提出了相关系数平稳过程的概念,从一般的非平稳过程中分离出一类工程上常见且又便于研究的随机过程。根据它的定义可知,相关系数平稳过程的相关函数一般已不是单变量的函数,但是其相关系数函数是单变量的函数。传统平稳随机过程仅是相关系数平稳过程的一个特例。下面给出两个重要的定理。

定理 1 设 $X(t)$ 为相关系数平稳随机过程,则 $Y(t) = \{X(t) - E[X(t)]\}/I(t)$ 为相关函数平稳随机过程,其中 $\text{Var}\{X(t)\} = \alpha^2 I^2(t)$, α 为常数。

定理 2 设 $X(t)$ 为相关系数平稳随机过程, $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ 为它的 n 维概率密度函数, $f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是相关函数平稳过程 $Y(t) = \{X(t) - E[X(t)]\}/I(t)$ 的 n 维概率密度函数,那么下式成立

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{I(t_1)I(t_2)\cdots I(t_n)} \quad (1)$$

3 相关系数平稳正态过程时域分析方法

设 $X(t)$ 为相关系数平稳正态过程,其均值、方差和相关系数函数为:

$$E\{X(t)\} = \mu(a, t) \quad (2)$$

$$\text{Var}\{X(t)\} = \sigma^2(b, t) \quad (3)$$

$$\rho(\tau) = \rho(c, \tau) \quad (4)$$

式中: $a = (a_0, a_1, \dots, a_r)'$, $b = (b_0, b_1, \dots, b_s)'$ 和 $c = (c_0, c_1, \dots, c_q)'$ 均为待定参数。其中 $\rho(c, 0) \equiv 1$ 。均值 $\mu(a, t)$, 方差 $\sigma^2(b, t)$ 和相关系数 $\rho(c, \tau)$ 与参数 a, b, c 之间的函数关系可从所研究问题的物理性质、理论推导、经验公式等多种渠道得到,也可采用似然比检验。

3.1 相关系数平稳正态过程的极大似然估计

设 $x_{ji} = x(t_{ji})$, $i = 1, 2, \dots, n_j$ 是来自第 j 个样本函数的一组观测值,记 $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j})'$, $\mu_j = (\mu_{j1}, \mu_{j2}, \dots, \mu_{jn_j})'$, 其中 $\mu_{ji} = \mu(a, t_{ji})$, $j = 1, 2, \dots, m$ 。则参数 a, b, c 的似然函数为:

$$L(a, b, c) = \prod_{j=1}^m (2\pi)^{-\frac{n_j}{2}} |V_{\rho_j}|^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ \prod_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\sigma_{ji}} \exp\left\{-\frac{1}{2} u_j' V_{\rho_j}^{-1} u_j\right\} \right\} \quad (5)$$

式中 $u_j = \left[\frac{x_{j1} - \mu_{j1}}{\sigma_{j1}}, \frac{x_{j2} - \mu_{j2}}{\sigma_{j2}}, \dots, \frac{x_{jn_j} - \mu_{jn_j}}{\sigma_{jn_j}} \right]'$, $\sigma_{ji} = \sigma(b, t_{ji})$, $i = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 1, 2, \dots, m$; $V_{\rho_j} = \{\rho(c, t_{jk} - t_{ji})\}_{n_j \times n_j}$ 为 $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j})$ 的相关系数矩阵。参数 a, b, c 的极大似然估计可由下面诸式求得:

$$\frac{\partial \ln L(a, b, c)}{\partial a_k} = - \sum_{j=1}^m u_j' V_{\rho_j}^{-1} \frac{\partial u_j}{\partial a_k} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, r \quad (6)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, c)}{\partial b_k} = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\sigma_{ji}} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial b_k} - \sum_{j=1}^m u_j' V_{\rho_j}^{-1} \frac{\partial u_j}{\partial b_k} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, s \quad (7)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, c)}{\partial c_k} = - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{|V_{\rho_j}|} \frac{\partial |V_{\rho_j}|}{\partial c_k} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m u_j' \frac{\partial V_{\rho_j}^{-1}}{\partial c_k} u_j = 0 \quad k = 0, 1, \dots, q \quad (8)$$

对非线性方程组(6)~(8)进行数值求解时,如果采用拟牛顿迭代法、梯度法等传统计算方法,则往往容易发散或收敛速度很慢,所以建议采用文献[6]中方法求解。

3.2 工程中常见的情况

工程实际中常见的随机过程均值 $\mu(a, t)$, 标准差 $\sigma(b, t)$ 和相关系数 $\rho(c, \tau)$ 可以用下面诸式描述:

$$\mu(a, t) = a_0 \varphi_0(t) + a_1 \varphi_1(t) + \cdots + a_r \varphi_r(t) \quad (9)$$

$$\sigma(b, t) = b_0 \psi_0(t) + b_1 \psi_1(t) + \cdots + b_s \psi_s(t) \quad (10)$$

$$\rho(c, \tau) = \exp(-c|\tau|) \quad (11)$$

式中 $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \cdots, r$ 和 $\psi_k(t)$, $k = 0, 1, \cdots, s$ 均为已知函数。则式(5)~(8)分别成为:

$$\ln L(a, b, c) = -\frac{\ln(2\pi)}{2} \sum_{j=1}^m n_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (n_j - 1) \ln(1 - d_j^2) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \ln \sigma_j - \sum_{j=1}^m \frac{1}{2(1 - d_j^2)} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{x_{ji} - \mu_{ji}}{\sigma_j} \right)^2 + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \left(\frac{x_{ji} - \mu_{ji}}{\sigma_j} \right)^2 - 2d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)})}{\sigma_j \sigma_{j(i+1)}} \right\} \quad (12)$$

$$a_0 = \bar{x} - \sum_{i=1}^r a_i \varphi_i \quad (13)$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_r)' = L_{aa}^{-1} L_{0a} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, c)}{\partial b_k} = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \frac{\psi_k(t_{ji})}{\sigma_j} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 - d_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})^2 \psi_k(t_{ji})}{\sigma_j^3} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})^2 \psi_k(t_{ji})}{\sigma_j^3} - d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)})}{\sigma_j \sigma_{j(i+1)}} \left[\frac{\psi_k(t_{ji})}{\sigma_j} + \frac{\psi_k(t_{j(i+1)})}{\sigma_{j(i+1)}} \right] \right\} = 0 \quad (15)$$

$k = 0, 1, \cdots, s$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, c)}{\partial c} = - \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - 1) |\tau_j| d_j^2}{1 - d_j^2} + \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j| d_j^2}{(1 - d_j^2)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})^2}{\sigma_j^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})^2}{\sigma_j^2} - 2d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)})}{\sigma_j \sigma_{j(i+1)}} \right\} + \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j| d_j}{1 - d_j^2} \left\{ d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})^2}{\sigma_j^2} - \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)})}{\sigma_j \sigma_{j(i+1)}} \right\} = 0 \quad (16)$$

式中:

$$L_{aa} = (l_{kl})_{r \times r} \quad (17)$$

$$L_{0a} = (l_{01}, l_{02}, \cdots, l_{0r})' \quad (18)$$

$$l_{kl} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 - d_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(\varphi_{ki} - \varphi_k)(\varphi_{li} - \varphi_l)}{\sigma_j^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{(\varphi_{ki} - \varphi_k)(\varphi_{li} - \varphi_l)}{\sigma_j^2} - d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(\varphi_{ki} - \varphi_k)(\varphi_{l(i+1)} - \varphi_l) + (\varphi_{k(i+1)} - \varphi_k)(\varphi_{li} - \varphi_l)}{\sigma_j \sigma_{j(i+1)}} \right\} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 - d_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{\sigma_j^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{\sigma_j^2} - d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{\varphi_{ki} \varphi_{l(i+1)} + \varphi_{k(i+1)} \varphi_{li}}{\sigma_j \sigma_{j(i+1)}} \right\} - n \varphi_k \varphi_l \quad (19)$$

$k, l = 1, 2, \cdots, r$

$$l_{0k} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-d_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{(x_{ji} - \bar{x})(\varphi_{kji} - \varphi_k)}{\sigma_{ji}^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{(x_{ji} - \bar{x})(\varphi_{kji} - \varphi_k)}{\sigma_{ji}^2} - \right. \\ \left. d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{(x_{j(i+1)} - \bar{x})(\varphi_{kji} - \varphi_k) + (x_{ji} - \bar{x})(\varphi_{k(i+1)} - \varphi_k)}{\sigma_{ji}\sigma_{j(i+1)}} \right\} = \\ \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-d_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ji}\varphi_{kji}}{\sigma_{ji}^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{x_{ji}\varphi_{kji}}{\sigma_{ji}^2} - d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{x_{j(i+1)}\varphi_{kji} + x_{ji}\varphi_{k(i+1)}}{\sigma_{ji}\sigma_{j(i+1)}} \right\} - n\bar{x}\varphi_k \\ k = 1, 2, \dots, r \quad (20)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-d_j^2} \left[\sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ji}}{\sigma_{ji}^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{x_{ji}}{\sigma_{ji}^2} - d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{x_{j(i+1)} + x_{ji(i+1)}}{\sigma_{ji}\sigma_{j(i+1)}} \right] \quad (21)$$

$$\varphi_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-d_j^2} \left[\sum_{i=1}^{n_j} \frac{\varphi_{kji}}{\sigma_{ji}^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{\varphi_{kji}}{\sigma_{ji}^2} - d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{\varphi_{kji} + \varphi_{k(i+1)}}{\sigma_{ji}\sigma_{j(i+1)}} \right] \\ k = 1, 2, \dots, r \quad (22)$$

$$n' = \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-d_j^2} \left[\sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\sigma_{ji}^2} + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} \frac{1}{\sigma_{ji}^2} - 2d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} \frac{1}{\sigma_{ji}\sigma_{j(i+1)}} \right] \quad (23)$$

式中 $\varphi_{ji} = \varphi_k(t_{ji})$, $d_j = e^{-c|\tau_j|}$, τ_j 是第 j 个样本函数的采样间隔, $j = 1, 2, \dots, m$ 。当 $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, s$ 时, 令 $b_0 = \sigma$, $\psi_0(t) = 1$, 则(15)和(16)可以化简为:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-d_j^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \mu_{ji})^2 + d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} (x_{ji} - \mu_{ji})^2 - 2d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} (x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)}) \right\} \quad (24)$$

$$E(c) = - \sum_{j=1}^m \frac{(n_j-1)|\tau_j|d_j^2}{1-d_j^2} \sigma^2 + \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|d_j^2}{(1-d_j^2)^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \mu_{ji})^2 + \right. \\ \left. d_j^2 \sum_{i=2}^{n_j-1} (x_{ji} - \mu_{ji})^2 - 2d_j \sum_{i=1}^{n_j-1} (x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)}) \right\} + \\ \sum_{j=1}^m \frac{|\tau_j|d_j}{1-d_j^2} \left\{ d_j \sum_{i=2}^{n_j-1} (x_{ji} - \mu_{ji})^2 - \sum_{i=1}^{n_j-1} (x_{ji} - \mu_{ji})(x_{j(i+1)} - \mu_{j(i+1)}) \right\} = 0 \quad (25)$$

此时, 由于式(19)~(23)中的 $\sigma_{ji} = \sigma$ 最终能够相互消去, 所以可直接令 $\sigma_{ji} = 1$ 。

4 相关系数平稳序列分析方法

定义 1 设 $X(t)$ 为相关系数平稳过程, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为它的一个时间序列, 其中 $X_i = X(t_i)$, $t_i = t_0 + i\Delta t$, t_0 和 Δt 分别为采样初始时刻和采样间隔。若 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 为 $AR(p)$ 、 $MA(q)$ 或 $ARMA(p, q)$ 序列, 其中 $Y_i = [X_i - \mu(a, t)]/I(b, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $E\{X(t)\} = \mu(a, t)$, $\text{Var}\{X(t)\} = \sigma^2 I^2(b, t)$, $\sigma^2 a = (a_0, a_1, \dots, a_r)'$ 和 $b = (b_0, b_1, \dots, b_s)$ 均为参数。则称 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为相关系数 $AR(p)$ 、 $MA(q)$ 或 $ARMA(p, q)$ 序列, 此时也称 $X(t)$ 为相关系数 $AR(p)$ 、 $MA(q)$ 或 $ARMA(p, q)$ 过程。

下面将讨论相关系数 $AR(p)$ 过程的均值 $\mu(a, t)$, 方差 $\sigma^2 I^2(b, t)$ 和自相关系数 ρ_k 的确定方法, $k = 1, 2, \dots$ 。设 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 为 $AR(p)$ 序列, 则有:

$$Y_t = \eta_{Y_{t-1}} + \eta_{Y_{t-2}} + \dots + \eta_{Y_{t-p}} + \epsilon \quad (26)$$

$$E[\epsilon \epsilon_{-k}] = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ \sigma_\epsilon^2 & k = 0 \end{cases} \quad (27)$$

4.1 相关系数 $AR(p)$ 过程精确极大似然估计

设 $x_{ji} = x(t_{ji})$, $t_{ji} = t_0 + i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots, n_j$ 是来自相关系数平稳正态过程 $X(t)$ 的第 j 个样本函数的一组观测值, 记 $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j})'$, 则由定理 1 可知, $y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jn_j})'$ 为 $Y(t)$ 的第 j 个相关函数平稳序列, 其中 $y_{ji} = [x_{ji} - \mu(a, t_{ji})]/I(b, t_{ji})$ 。若它们是 $AR(p)$ 序列, 则根据定理 2, 参数 a , b , η 和 σ_ϵ 的对数似然函数为:

$$\ln L(a, b, \eta, \sigma_\epsilon) = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{n_j}{2} \ln(2\pi) - n_j \ln \sigma_\epsilon + \frac{1}{2} \ln |\mathbf{V}_p^{-1}| - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \mathbf{y}'_{jp} \mathbf{V}_p^{-1} \mathbf{y}_{jp} - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta_{1j(i-1)} - \cdots - \eta_{pj(i-p)})^2 - \sum_{i=1}^{n_j} \ln I(b, t_{ji}) \right\} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, \eta, \sigma_\epsilon)}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbf{y}'_{jp} \mathbf{V}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{y}_{jp}}{\partial a_k} - \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta_{1j(i-1)} - \cdots - \eta_{pj(i-p)}) \times \left[\frac{\partial y_{ji}}{\partial a_k} - \eta_1 \frac{\partial y_{j(i-1)}}{\partial a_k} - \cdots - \eta_p \frac{\partial y_{j(i-p)}}{\partial a_k} \right] \right\} = 0$$

$$k = 0, 1, \cdots, r \quad (29)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, \eta, \sigma_\epsilon)}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \mathbf{y}'_{jp} \mathbf{V}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{y}_{jp}}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{I(b, t_{ji})} \frac{\partial I(b, t_{ji})}{\partial b_k} - \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta_{1j(i-1)} - \cdots - \eta_{pj(i-p)}) \left[\frac{\partial y_{ji}}{\partial b_k} - \eta_1 \frac{\partial y_{j(i-1)}}{\partial b_k} - \cdots - \eta_p \frac{\partial y_{j(i-p)}}{\partial b_k} \right] \right\} = 0$$

$$k = 0, 1, \cdots, s \quad (30)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, \eta, \sigma_\epsilon)}{\partial \eta_k} = \frac{m}{2|\mathbf{V}_p^{-1}|} \frac{\partial |\mathbf{V}_p^{-1}|}{\partial \eta_k} - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{j=1}^m \mathbf{y}'_{jp} \frac{\partial \mathbf{V}_p^{-1}}{\partial \eta_k} \mathbf{y}_{jp} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta_{1j(i-1)} - \cdots - \eta_{pj(i-p)}) y_{j(i-k)} = 0$$

$$k = 1, 2, \cdots, p \quad (31)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, b, \eta, \sigma_\epsilon)}{\partial \sigma_\epsilon} = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{n_j}{\sigma_\epsilon} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^3} \mathbf{y}'_{jp} \mathbf{V}_p^{-1} \mathbf{y}_{jp} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^3} \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta_{1j(i-1)} - \cdots - \eta_{pj(i-p)})^2 \right\} = 0 \quad (32)$$

式中: $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)'$, $\mathbf{y}_{jp} = (y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jp})'$, $\mathbf{V}_p^{-1} = \{v_{ij}^{-1}\}_{p \times p}$, v_{ij}^{-1} 由下式给出^[1]:

$$v_{ij}^{-1} = \left[\sum_{l=0}^{i-1} \eta_{l+j-i} - \sum_{l=p+1-j}^{p+i-j} \eta_{l+j-i} \right] \quad 1 \leq i \leq j \leq p \quad (33)$$

其中: $\eta_0 = -1$ 。当 $i > j$ 时, 有 $v_{ij}^{-1} = v_{ji}^{-1}$ 。

$$\frac{\partial |\mathbf{V}_p^{-1}|}{\partial \eta_k} = \sum_{i=1}^p v_{ii}^{-1} \frac{\partial v_{ii}^{-1}}{\partial \eta_k} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_p^{-1}}{\partial \eta_k} = \left(\frac{\partial v_{ij}^{-1}}{\partial \eta_k} \right)_{p \times p} \quad (35)$$

式中 v_{ij}^{-1} 为元素 v_{ij}^{-1} 的代数余子式; 当 $i \leq j$ 时, $\frac{\partial v_{ij}^{-1}}{\partial \eta_k}$ 由下式计算:

$$\frac{\partial v_{ii}^{-1}}{\partial \eta_k} = \delta(k \leq i-1) \eta_{k+j-i} + \delta(j-i \leq k \leq j-1) \eta_{k+i-j} - \delta(p+1-j \leq k \leq p+i-j) \eta_{k+j-i} - \delta(p+1-i \leq k \leq p) \eta_{k+i-j} \quad (36)$$

当 $i > j$ 时, 有

$$\frac{\partial v_{ii}^{-1}}{\partial \eta_k} = \frac{\partial v_{ji}^{-1}}{\partial \eta_k} \quad (37)$$

其中 $\delta[g(x)]$ 被定义为: 当 $g(x)$ 成立时 $\delta[g(x)] = 1$, 否则 $\delta[g(x)] = 0$ 。

4.2 相关系数 $A_R(p)$ 过程条件极大似然估计

精确极大似然估计较为繁琐, 下面讨论易于计算的条件极大似然估计。在每个样本前 p 个观

测值为已知的条件下对数似然函数(当样本量较大时,前 p 个观测值的影响可以忽略不计)由下式给出:

$$\ln L^*(a, b, \eta, \alpha_\epsilon) = \sum_{j=1}^m \left\{ -\frac{n_j - p}{2} \ln(2\pi) - (n_j - p) \ln \alpha_\epsilon - \frac{1}{2\alpha_\epsilon^2} \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta y_{j(i-1)} - \dots - \eta_p y_{j(i-p)})^2 - \sum_{i=1}^{n_j} \ln I(b, t_{ji}) \right\} \quad (38)$$

对式(38)求偏导,得到求解 a, b, η 和 α_ϵ 似然方程组如下:

$$\frac{\partial \ln L^*(a, b, \eta, \alpha_\epsilon)}{\partial a_k} = -\frac{1}{\alpha_\epsilon^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta y_{j(i-1)} - \dots - \eta_p y_{j(i-p)}) \times \left[\frac{\partial y_{ji}}{\partial a_k} - \eta \frac{\partial y_{j(i-1)}}{\partial a_k} - \dots - \eta_p \frac{\partial y_{j(i-p)}}{\partial a_k} \right] = 0 \quad (39)$$

$$k = 0, 1, \dots, r$$

$$\frac{\partial \ln L^*(a, b, \eta, \alpha_\epsilon)}{\partial b_k} = -\frac{1}{\alpha_\epsilon^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta y_{j(i-1)} - \dots - \eta_p y_{j(i-p)}) \times \left[\frac{\partial y_{ji}}{\partial b_k} - \eta \frac{\partial y_{j(i-1)}}{\partial b_k} - \dots - \eta_p \frac{\partial y_{j(i-p)}}{\partial b_k} \right] - \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{I(b, t_{ji})} \frac{\partial I(b, t_{ji})}{\partial b_k} = 0 \quad (40)$$

$$k = 0, 1, \dots, s$$

$$\alpha_\epsilon^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m (n_j - p)} \times$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=p+1}^{n_j} (y_{ji} - \eta y_{j(i-1)} - \dots - \eta_p y_{j(i-p)})^2 \quad (41)$$

$$(\eta, \eta_1, \dots, \eta_p)' = L^{-1} m^T L_0 \eta \quad (42)$$

式中:

$$L m = (l_{kl})_{p \times p} \quad (43)$$

$$L_0 \eta = (l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0p})' \quad (44)$$

$$l_{kl} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=p+1}^{n_j} y_{ji(i-k)} y_{ji(i-l)} \quad (45)$$

$$l_{0k} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=p+1}^{n_j} y_{ji} y_{ji(i-k)} \quad (46)$$

4.3 自相关系数的确定

相关系数 $AR(p)$ 过程的自相关系数 $\rho_k, k=$

$1, 2, \dots, p$, 可以通过求解尤尔—瓦尔克方程^[7]得到:

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p)' = L^{-1} \rho \rho^T L_0 \rho \quad (47)$$

式中:

$$L \rho \rho = (l_{kl})_{p \times p} \quad (48)$$

$$L_0 \rho = (l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0p})' \quad (49)$$

$$l_{kl} = \eta_{k-l} + \eta_{k+l} - \delta(k=l) \quad (50)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, p$$

$$l_{0k} = -\eta_k \quad (51)$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

式中当 $k-l \leq 0$ 时, $\eta_{k-l} = 0$; 当 $k+l > p$ 时, $\eta_{k+l} = 0$. 当 $k > p$ 时, 自相关系数 ρ_k 可由下式递推求得:

$$\rho_k = \eta_1 \rho_{k-1} + \eta_2 \rho_{k-2} + \dots + \eta_p \rho_{k-p} \quad (52)$$

$$k = p+1, p+2, \dots$$

$$\alpha_\epsilon^2 = \frac{\alpha_\epsilon^2}{1 - \eta_1 \rho_1 - \eta_2 \rho_2 - \dots - \eta_p \rho_p} \quad (53)$$

相关系数 $AR(p)$ 过程的自相关系数 $\rho_k, k=1, 2, \dots$, 也可以通过总体谱^[11]求得:

$$\alpha_\epsilon^2 = \int_{-\pi}^{\pi} S_Y(\omega) d\omega \quad (54)$$

$$\rho_k = \frac{1}{\alpha_\epsilon^2} \int_{-\pi}^{\pi} S_Y(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (55)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

式中:

$$S_Y(\omega) = \frac{\alpha_\epsilon^2}{2\pi} \times \frac{(1 - \eta_1 e^{-j\omega} - \eta_2 e^{-j2\omega} - \dots - \eta_p e^{-jp\omega})^{-1} \times (1 - \eta_1 e^{j\omega} - \eta_2 e^{j2\omega} - \dots - \eta_p e^{jp\omega})^{-1}}{(1 - \eta_1 e^{-j\omega} - \eta_2 e^{-j2\omega} - \dots - \eta_p e^{-jp\omega})^{-1} \times (1 - \eta_1 e^{j\omega} - \eta_2 e^{j2\omega} - \dots - \eta_p e^{jp\omega})^{-1}} \quad (56)$$

此外, $AR(p)$ 模型的阶数可采用似然比检验^[5]、 AIC 准则^[7]或偏相关系数准则^[7]确定。

对于相关系数 $MA(q)$ 和 $ARMA(p, q)$ 过程的均值 $\mu(a, t)$, 方差 $\sigma^2 I^2(b, t)$ 和自相关系数 ρ_k 的确定, 可以用完全相同的方式进行讨论, 这里不再赘述。

5 相关系数平稳过程谱分析

5.1 随机项谱密度和趋势项谱密度

定义 2 设 $C(t, t+\tau)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的自协方差函数, 如果积分

$$\bar{C}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_T^{T+\tau} C(t, t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_T^{T+\tau} \text{Cov}[X(t)X(t+\tau)] dt \quad (57)$$

存在, 那么称 $\bar{C}(\tau)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的平均协方差函数, 它表示协方差函数 $C(t, t + \tau)$ 在时间轴上的平均。

定义 3 设 $\bar{C}(\tau)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的平均协方差函数, 如果积分

$$S_C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (58)$$

存在, 那么称 $S_C(\omega)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的随机项谱密度。

定理 3 设 $S_C(\omega)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的随机项谱密度, $\bar{C}(\tau)$ 为 $X(t)$ 的平均协方差函数, 则 $S_C(\omega)$ 和 $\bar{C}(\tau)$ 构成一傅立叶变换对, 即有:

$$S_C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (59)$$

$$\bar{C}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_C(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (60)$$

定义 4 如果积分

$$\bar{M}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_T E[X(t)] E[X(t + \tau)] dt \quad (61)$$

存在, 那么称 $\bar{M}(\tau)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的平均趋势函数。

定义 5 设 $\bar{M}(\tau)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的平均趋势函数, 如果积分

$$S_M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{M}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (62)$$

存在, 那么称 $S_M(\omega)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的趋势项谱密度。

定理 4 设 $S_M(\omega)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的趋势项谱密度, $\bar{M}(\tau)$ 为 $X(t)$ 的平均趋势函数, 则 $S_M(\omega)$ 和 $\bar{M}(\tau)$ 构成一傅立叶变换对, 即有:

$$S_M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{M}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (63)$$

$$\bar{M}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (64)$$

定理 5 设 $S(\omega)$ 为相关系数平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度, $S_C(\omega)$ 和 $S_M(\omega)$ 分别为 $X(t)$ 的随机项谱密度和趋势项谱密度, 则有:

$$S(\omega) = S_C(\omega) + S_M(\omega) \quad (65)$$

即 $S_C(\omega)$ 为功率谱密度 $S(\omega)$ 的随机项分量, $S_M(\omega)$ 为趋势项分量。

5.2 相关系数平稳正态过程谱密度分析

设相关系数平稳正态过程 $X(t)$ 的均值为 $\mu(a, t)$, 方差为 $\sigma^2 I^2(b, t)$ 和自相关系数为 $\rho_k(k=1, 2, \dots)$, 它们已由上述方法求得。那么相关系数

平稳正态过程 $X(t)$ 的随机项谱密度 $S_C(\omega)$ 、趋势项谱密度 $S_M(\omega)$ 和功率谱密度 $S(\omega)$ 分别由下面诸式求得:

$$S_C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}(\tau) \rho(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (66)$$

$$S_M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{M}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (67)$$

$$S(\omega) = S_C(\omega) + S_M(\omega) \quad (68)$$

式中:

$$\bar{\sigma}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_T \sigma(b, t) \sigma(b, t + \tau) dt \quad (69)$$

$$\bar{M}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_T \mu(a, t) \mu(a, t + \tau) dt \quad (70)$$

$\rho(\tau)$ 可根据自相关系数 $\rho_k(k=1, 2, \dots)$ 求得。

5.3 相关系数平稳过程的时频表示方法

为了研究相关系数平稳过程 $X(t)$ 的频谱随时间变化的规律, 下面讨论 $X(t)$ 的短时傅立叶变换(小波变换可以类似进行)。相关系数平稳过程 $X(t)$ 的短时傅立叶变换的能量分布由下式计算:

$$P_X(t, \omega) = E \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) w(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \right\} \quad (71)$$

式中 $w(\tau - t)$ 为实函数窗。将相关系数平稳过程 $X(t)$ 的均值 $\mu(a, t)$, 方差 $\sigma^2 I^2(b, t)$ 和自相关系数函数 $\rho(\tau)$ 代入得:

$$P_X(t, \omega) = P_C(t, \omega) + P_M(t, \omega) \quad (72)$$

式中 $P_C(t, \omega)$ 和 $P_M(t, \omega)$ 分别对应于 $X(t)$ 的随机项和趋势项的能量分布, 由下式给出:

$$P_C(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (73)$$

$$P_M(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{M}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (74)$$

$$\bar{C}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \sigma(b, t_1) \sigma(b, t_1 + \tau) w(t_1 - t) w(t_1 + \tau - t) dt_1 \quad (75)$$

$$\bar{M}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(a, t_1) \mu(a, t_1 + \tau) w(t_1 - t) w(t_1 + \tau - t) dt_1 \quad (76)$$

6 线性系统的输出

对于定常的线性系统, 当输入为相关系数平稳过程 $X(t)$ 时, 其输出过程 $Z(t)$ 的均值 $\mu_Z(t)$ 、方差 $\sigma_Z^2(t)$ 、相关函数 $R_Z(t, t + \tau)$ 、谱密度 $S_Z(\omega)$ 和

互相关函数 $R_{xz}(t, t + \tau)$ 、互谱密度 $S_{xz}(\omega)$ 分别由下面诸式给出:

$$\mu_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda \quad (77)$$

$$\sigma_z^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda_1 - \lambda_2) \alpha(t - \lambda_1) \alpha(t - \lambda_2) h(\lambda_1) h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (78)$$

$$\begin{aligned} R_z(t, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t - \lambda_1, t + \tau - \lambda_2) h(\lambda_1) h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= C_z(t, t + \tau) + \mu_z(t) \mu_z(t + \tau) \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} R_{xz}(t, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t, t + \tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda \\ &= C_{xz}(t, t + \tau) + \mu_x(t) \mu_z(t + \tau) \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} S_z(\omega) &= S_x(\omega) \times \\ &\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1) e^{j\omega\lambda_1} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2) e^{-j\omega\lambda_2} d\lambda_2 \end{aligned} \quad (81)$$

$$S_{xz}(\omega) = S_x(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \quad (82)$$

$$\begin{aligned} C_z(t, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau + \lambda_1 - \lambda_2) \\ &\alpha(t - \lambda_1) \alpha(t + \tau - \lambda_2) h(\lambda_1) h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} C_{xz}(t, t + \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau - \lambda) \alpha(t) \\ &\alpha(t + \tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (84)$$

式中: $h(t)$ 为系统输出的脉冲响应函数。

7 结 论

(1) 相关系数平稳过程是工程中常见的一类随机过程, 其均值和方差通常随时间而变化, 传统的平稳过程仅是它的一个特例。本文通过一个简单变换将相关系数平稳过程转变成传统的平稳随机过程进行研究, 并建立了相关系数平稳随机过程时域分析方法, 详细讨论了工程上常用的情况。

(2) 提出了相关系数 $AR(p)$ 、 $MA(q)$ 和 $AR-MA(p, q)$ 序列的概念, 建立了相关系数平稳序列分析方法, 详细讨论了相关系数 $AR(p)$ 序列的极

大似然估计。

(3) 提出了相关系数平稳过程随机项谱密度和趋势项谱密度的概念, 给出了功率谱密度与它们之间的关系式, 建立了相关系数平稳过程谱分析方法。研究了相关系数平稳过程的频谱随时间变化的规律, 讨论了相关系数平稳过程的时频表示方法。

(4) 对于定常的线性系统, 建立了当输入为相关系数平稳过程时, 其输出过程的均值、方差、相关函数、谱密度和互相关函数、互谱密度的计算公式。

(5) 本文方法首先充分发挥在时域可以进行全程分析, 具有信息量大、精度高的优点, 确定出相关系数平稳过程的均值函数、方差函数和相关系数函数, 然后再对其进行傅里叶变换、短时傅里叶变换或小波变换, 给出相关系数平稳过程的谱密度。

(6) 在性能测试中应用表明, 采用本文方法只要测定一个样本函数就能够对产品性能的均值和方差进行估计, 与传统的需要测定一组样本函数的成组试验法相比, 在精度相同的情况下可以节省大量试验经费和时间。

参考文献

- [1] (美) 詹姆斯 D 汉密尔顿 时间序列分析[M], 刘明志译 北京: 中国社会科学出版社, 1999
- [2] 王宏禹 非平稳随机信号分析与处理[M], 北京: 国防工业出版社, 2001
- [3] Gardiner C W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences [M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983: 373- 418
- [4] Collins J A. Failure of Materials in Mechanical Design, Analysis, Prediction, Prevention [M]. New York: John Wiley and Sons, 1981: 360- 500
- [5] 傅惠民 相关系数平稳过程[J]. 机械强度, 2002, 24(3): 400 - 404
- [6] 傅惠民, 张应福, 张少波 解非线性方程组的一元化方法[J]. 机械强度, 1999, 21(3): 205- 207
- [7] 刘次华 随机过程[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001

(责任编辑 杨再荣)